5.2) a) Veo si coinciden sus normas de Frobenius:

$$\left\|\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & i \end{bmatrix}\right\| = \sqrt{tr\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & i \end{bmatrix}\right)} = \sqrt{tr\left(\begin{bmatrix} 5 & 2+2i \\ 2-2i & 5 \end{bmatrix}\right)} = \sqrt{10}$$

$$\neq$$

$$\left\|\begin{bmatrix} i & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right\| = \sqrt{tr\left(\begin{bmatrix} -i & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right)} = \sqrt{tr\left(\begin{bmatrix} 2 & -4i+1 \\ 4i+1 & 17 \end{bmatrix}\right)} = \sqrt{19}$$

NO SON UNITAR. EQUIV. porque no coinciden.

b) Analizo normas de Frobenius:

$$\left|\left|\left|\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}\right|\right|\right| = \sqrt{tr\left(\begin{bmatrix}0 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}\right)} = \sqrt{tr\left(\begin{bmatrix}4 & 2\\ 2 & 2\end{bmatrix}\right)} = \sqrt{6} \quad \neq$$

$$\left|\left|\left|\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\right|\right|\right| = \sqrt{tr\left(\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\right)} = \sqrt{tr\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}\right)} = \sqrt{5}$$

NO SON UNIT. EQUIV.

c) No coinciden sus trazas → NO SON UNIT. EQUIV.

d) Determinantes distintos → NO SON UNIT. EQUIV.

e) Analizo normas:

$$\left|\left|\left|\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\right|\right|\right| = \sqrt{tr\left(\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\right)} = \sqrt{tr\left(\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\right)} = \sqrt{3} \quad =$$

$$\left|\left|\left|\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -i & 0\\ 0 & 0 & i\end{bmatrix}\right|\right|\right| = \sqrt{tr\left(\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & i & 0\\ 0 & 0 & -i\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -i & 0\\ 0 & 0 & i\end{bmatrix}\right)} = \sqrt{tr\left(\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\right)} = \sqrt{3}$$

Como no puedo asegurar nada, busco autovalores y autovectores de la primera matriz y la diagonalizo unitariamente. Si se cumple $A = UBU^*$, entonces A y B son unitariamente equivalentes.

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad P(\lambda) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{bmatrix}\right) = (\lambda-1).(\lambda^2+1) =$

$= \lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1$

Autovalores: $P(\lambda) = 0 \to \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = i \\ \lambda_3 = -i \end{matrix}}$

Para $\lambda = 1$

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} F_2 \to F_1 - F_2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$x - y = 0 \to x = 0$

$-2y = 0 \to y = 0$

$\to \bar{x} = z.\underbrace{(0,0,1)}_{\text{AUTOVECTOR } \lambda = 1.\ v_1}$

Para $\lambda = i$

$\begin{pmatrix} i & -1 & 0 \\ 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & i-1 \end{pmatrix} F_2 \to F_1 - i F_2 \begin{pmatrix} i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (i-1) \end{pmatrix}$

$ix - y = 0 \to y = ix$

$(i-1)z = 0 \to z = 0$

$\to \bar{x} = x\underbrace{(1, i, 0)}_{\text{AUTOVECTOR } \lambda = i\ v_2}$

AUTOVECTOR $\lambda = -i$: $(1, -i, 0)$ v_3

Me fijo si los tres autovect. forman una base ortogonal:

$\boxed{\text{uso } \langle x,y\rangle = y^* x}$

$\langle v_1, v_2 \rangle = [1, -i\ 0] . \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$ ✓

$\langle v_2, v_3 \rangle = [1\ i\ 0] . \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix} = 0$ ✓

$\langle v_1, v_3 \rangle = [1\ i\ 0] . \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$ ✓

Efectivamente forman base ortogonal, las normalizo para obtener una ortonormal y armar U unitaria:

$v_1 = (0, 0, 1)$, $v_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $v_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-i}{\sqrt{2}}, 0\right)$

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & i/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{bmatrix}$$

o también

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -i/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix}$$

tal que $A = U \Lambda U^*$

y como en este último caso $\Lambda = B$

$\rightarrow A = U B U^*$

Por lo que A y B son unitariamente equivalentes.

F) Analizo sus normas:

$$\left|\left|\left|\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}\right|\right|\right| = \sqrt{tr\left(\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}\right)} = \sqrt{tr\left(\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 4\\ 0 & 4 & 13\end{bmatrix}\right)} = \sqrt{17}.$$

$$\neq$$

$$\left|\left|\left|\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}\right|\right|\right| = \sqrt{tr\left(\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}\right)} = \sqrt{tr\left(\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 9\end{bmatrix}\right)} = \sqrt{14}$$

NO SON UNIT. EQUIVALENTES.